

**MODELAREA MATEMATICĂ A
SOLIDIFICĂRII PIESELOR TURNATE
DIN ALIAJE EUTECTICE**

**THE MATHEMATICAL MODELING
OF CASTING SOLIDIFICATION OF
EUTECTIC ALLOYS**

V. MONESCU, I. CIOBANU, S.I. MUNTEANU, V. GEAMĂN, A. CRIȘAN

Universitatea "TRANSILVANIA" din Brașov, România

Person contact: ciobanu_i_bv@yahoo.com

REZUMAT / ABSTRACT

La departamentul Știința Materialelor de la Universitatea Transilvania din Brașov au fost realizate mai multe modele matematice și softuri pentru simularea solidificării pieselor turnate. În lucrare este prezentat modelul matematic pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice. Modelul matematic utilizează metoda diferențelor finite. Modelul matematic are particularitatea că ecuația de bilanț termic a elementelor de volum în care este divizată piesa turnată, este explicată în nouă cazuri. Cazurile sunt stabilite în funcție de temperatura inițială și de temperatura finală a elementelor pentru un interval de timp. Acest mod de lucru are avantajul că face posibilă modelarea solidificării la temperatură constantă. Modelele matematice utilizate de alte softuri sistematizează calculul numai în funcție temperatura inițială a elementelor de volum. Din această cauză aceste modele nu pot reproduce solidificarea la temperatură constantă (cazul metalelor pure și al aliajelor eutectice). Pentru a simula solidificarea aliajelor eutectice și a metalelor pure, aceste softuri consideră că aceste aliaje se solidifică într-un interval de temperatură foarte mic. În final sunt prezentate date privind structura softului și rezultatele (despre solidificarea pieselor turnate) pe care acesta le furnizează.

At the Department of Materials Science from Transilvania University, Faculty of Materials Science & Engineering, were developed some mathematical models and software for the computer simulation of casting solidification.

The paper presents a mathematical model for computer simulation of eutectic alloys. The mathematical model uses the finite differences method. Mathematical model has the peculiarity that thermic balance equation of the volume in which the cast piece is divided, is explained in nine cases. The cases are set depending on the initial and final temperature of the elements for a period of time. This work method has the advantage that it makes the modeling of solidification possible at a constant temperature. The mathematical models used by other software gives only a systematization of calculations depending on the initial temperature of the volume elements. That is why these models cannot reproduce the solidification at a constant temperature (in the case of pure metals and eutectic alloys). To simulate the solidification of eutectic alloys and pure metals, these software take into consideration that these alloys solidify in a very short temperature interval.

In the end of the paper, are presented data regarding to the structure of the software and the results (of the solidification of castings) that it provides.

Key words: casting, solidification, mathematical modeling, solidification simulation

1. INTRODUCERE

Solidificarea pieselor turnate din aliaje metalice are o mare influență asupra calității acestora. Defectele cele mai frecvente determinate de solidificarea pieselor turnate sunt retasurile. Acestea sunt goluri cauzate de

1. INTRODUCTION

The solidification of the casting from metal alloys has a great influence over their quality. The most frequent defects determined by the solidification of the cast parts are the shrink holes. These represent funnels

contractia aliajelor la solidificare. Măsurile tehnologice pentru eliminarea acestor defecte din piesele turnate se bazează pe cunoașterea evoluției câmpului de temperatură din ansamblul piesă turnată - forma în timpul răcirii și solidificării aliajului.

Este necesar să se cunoască în primul rând poziția nodurilor termice, deplasarea frontului de solidificare și evoluția cantității de aliaj lichid din maselotă.

Cea mai avantajoasă metodă pentru studiul solidificării pieselor turnate în vederea eliminării retasurilor o constituie simularea solidificării cu ajutorul calculatorului [4, 5].

2. SCOPUL LUCRĂRII

La departamentul Știința Materialelor de la Universitatea Transilvania din Brașov, Facultatea Știința și Ingineria Materialelor, au fost realizate mai multe modele matematice și softuri pentru simularea solidificării pieselor turnate [1, 2, 3].

Acestea se referă la solidificarea pieselor turnate din aliaje eutectice, din aliaje hipoeutectice și din aliaje de tip soluție solidă.

În lucrare este prezentat modelul matematic pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice.

Aceste modele matematice prezintă particularitatea că pot să simuleze solidificarea la temperatură constantă a aliajelor eutectice și hipoeutectice (ca în **Figura 1**).

Pentru a simula solidificarea la temperatură constantă modelele matematice realizate la Universitatea Transilvania din Brașov explicitează ecuația de bilanț termic în nouă cazuri, în funcție de temperatură la începutul și la sfârșitul unui interval de timp " τ ".

De obicei modelele matematice care stau la baza softurilor comercializate pe plan internațional explicitează ecuația de bilanț termic numai în funcție de temperatura momentană a elementelor în care este divizată o formă de turnare. De aceea aceste softuri nu pot reda exact solidificarea la temperatură constantă.

Ele au la bază modelele matematice specifice aliajelor care se solidifică sub formă de soluție solidă. Se consideră ipoteza că transformarea eutectică și solidificarea metalelor pure au loc într-un interval de temperatură foarte mic (**Figura 2**).

Lucrarea prezintă modelul matematic pentru solidificarea pieselor turnate din aliaje eutectice.

De asemenea sunt prezentate date despre structura softului și rezultatele pe care acesta le furnizează.

caused by the alloy contraction when they solidify. The technological measures to eliminate these defects are based on the knowledge of the evolution of the temperature field in the casting unit - the form it takes while cooling and solidifying.

Firstly, the position of the hot spots is to be known, together with the movement of the solidification front and the evolution of the liquid alloy quantity existent in the feeder.

The most advantageous method to study the solidification of the cast parts in order to eliminate the shrink holes is to simulate the solidification with the help of the computer [4, 5].

2. AIM OF PAPER

The Department of Materials Science from Transilvania University, Faculty of Materials Science & Engineering were developed some mathematical models and software for the computer simulation of casting solidification [1, 2, 3].

These refer to the solidification of the cast parts from eutectic, hypoeutectic and solid solution type alloys.

The paper presents a mathematical model for the simulation of casting solidification of eutectic alloys.

*These mathematical models have the particularity that they can simulate the solidification of eutectic and hypoeutectic alloys at a constant temperature (**Figure 1**).*

To simulate the solidification at a constant temperature, the mathematical models completed at Transilvania University in Brasov specify the thermal balance equation in nine cases, according to the temperature at the beginning and at the end of a " τ " time interval.

Usually, the mathematical models that stand on the basis of internationally commercialized softs only specify the thermic balance equation according to the instantaneous temperature of the elements existent in the cast shape. That is why these softs cannot render the exact solidification at a constant temperature.

*They have at their basis the mathematical models that are specific to the alloys that solidify in solid solution. The hypothesis that the eutectic transformation and the solidification of the pure alloys take place in a very short temperature interval is considered (**Figure 2**).*

The paper presents the mathematical model for the simulation of the solidification of the cast parts from eutectic alloys.

Also, data is presented about the structure of the soft and the results it supplies.

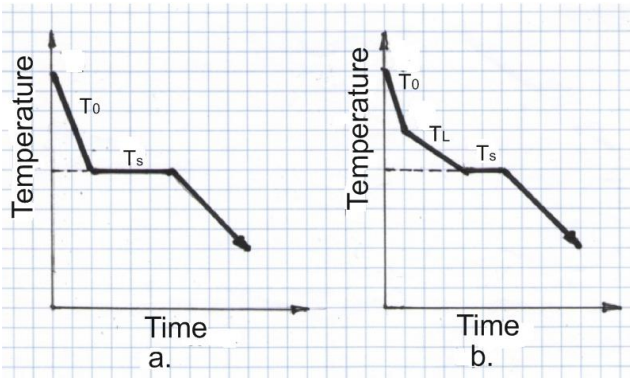


Fig. 1. Variația temperaturii utilizată pentru modelarea solidificării aliajelor eutectice (a) și hipoeutectice (b) la Universitatea Transilvania din Brașov
The temperature variation used for solidification modeling of eutectic (a) and hypoeutectic (b) alloys at Transilvania University

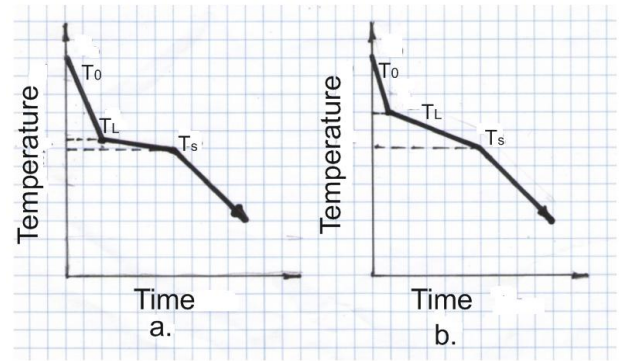


Fig. 2. Variația temperaturii utilizată în mod curent pentru modelarea solidificării aliajelor eutectice (a) și hipoeutectice (b)
The temperature variation currently used for solidification modeling of eutectic (a) and hypoeutectic (b) alloys

3. IPOTEZELE MODELULUI MATEMATIC

Modelul matematic utilizează metoda diferențelor finite. Ansamblul piesă turnată - formă este divizat în elemente cubice cu latura Δ . Poziția unui element în ansamblul piesă - formă este notată prin trei coordonate numerice "i,j,k". Acestea reprezintă numărul de ordine al elementelor pe cele trei axe ortogonale Ox, Oy și Oz.

În **Figura 3** este arătat principiul divizării formelor și notarea prin indici a elementelor.

2. HYPOTHESES OF THE MATHEMATICAL MODEL

The mathematical model uses the finite differences method. The casting - shape unit/assembly is divided into cubic elements with the side Δ . The position of an element in the cast - shape unit is marked with three numerical coordinates called "i,j,k". These represent the serial number of the elements in the three orthogonal axis Ox, Oy and Oz.

Figure 3 shows the shape division principle and the element marking with indices.

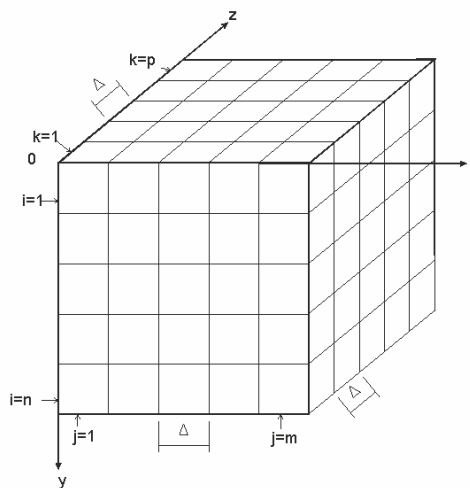


Fig. 3. Divizarea ansamblului formeii în elemente finite cubice
Mould assembly divided in cubic finite elements

Timpul total al procesului de simulare este divizat în intervale de timp " τ ". Un moment oarecare de pe parcursul procesului " τ_q " este exprimat prin relația $\tau_q = q \cdot \tau$, unde q reprezintă coordonata numerică de timp. Aceasta are valori întregi cuprinse între $q = 0$ și $q = q_{max}$.

The total time of the simulation process is divided into " τ " time intervals. Any moment on the " τ_q " process is expressed by the relation $\tau_q = q \cdot \tau$, where q represents the time numerical coordinate. This has integral values between $q = 0$ and $q = q_{max}$.

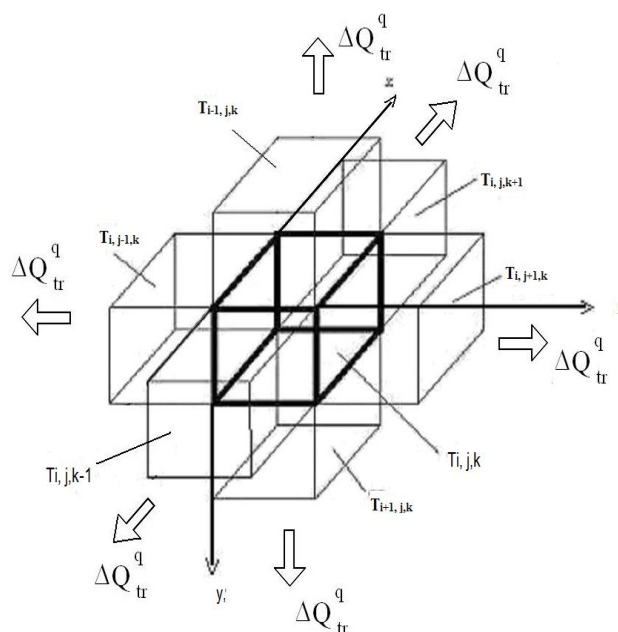


Fig. 4. Notarea temperaturii elementelor de volum și schema transmisiei căldurii de la un element spre elementele vecine
Volume elements temperature marking and the heat transmission schema from an element to its neighbour elements

La elaborarea modelului matematic s-au considerat următoarele ipoteze:

- contactul între elementele divizate este perfect pe toată durata procesului;
- transmisia de căldură în interiorul formei are loc numai prin conductibilitate în cele trei direcții perpendiculare pe suprafața elementelor discretizate;
- procesele de evaporare, de recondensare și de ardere în pereții formei și de asemenea circulația gazelor prin porii formei, se iau în considerare printr-un coeficient echivalent de transmitere a căldurii;
- schimbul de căldură între formă și mediul ambiant se ia în considerare printr-un coeficient de convecție;
- se neglijează variația volumului cu temperatura, cât și la solidificare (ca urmare densitatea se consideră constantă cu temperatura);
- se consideră variația căldurii specifice, a conductibilității termice cu temperatura și cu starea de agregare;
- aliajul se solidifică la temperatură constantă, ipoteză valabilă în cazul metalelor pure și aliajelor eutectice;
- se neglijează procesele de curgere și de alimentare în timpul solidificării.

4. NOTAȚII

Caracteristicile fizice ale unui element în care este divizată forma sunt notate prin indicii "i,j,k" - pentru spațiu și "q" - pentru timp.

The mathematical model considers the following hypotheses:

- *the contact between the elements is perfect during all the process;*
- *the heat transmission inside the mould is made only by means of conductivity in perpendicular direction on the surfaces of the elements;*
- *the evaporation, re-condensation and burning process inside the walls of the mould, as well as gases circulation through the pores of the mould, and we will use an equivalent coefficient of the heat transmission;*
- *the heat exchange between mould-environment is done by convection coefficient;*
- *we neglected the variation of the volume with the temperature as well as the volume variation at solidification (as result the density is considered constant with temperature);*
- *we take into consideration the variation of the specific heat and of the thermal conductivity as function of temperature and with changing the liquid-solid state;*
- *the alloy solidify at constant temperature, hypothesis valid for the pure metals and eutectic alloys;*
- *the flowing and feeding processes in timpul solidificării are ignored.*

4. NOTATIONS

The physical characteristics of an element whose shape is divided are marked with clues "i,j,k" - for space and "q"- for time.

Pentru scrierea ecuațiilor se utilizează următoarele notații:

- T_{ijk}^q - temperatura elementului cu coordonatele "i,j,k" la momentul "q";
- T_{ijk}^{q+1} - temperatura elementului "i,j,k", la momentul q+1;
- $(T_s)_{ijk}$ - temperatura solidus a elementului "i,j,k";
- ξ_{ijk}^q - fracția de solid la momentul "q" în elementul "i,j,k";
- Δ - latura elementelor (pasul rețelei de divizare);
- $(\rho_s)_{ijk}^q$ - densitatea în stare solidă;
- $(\rho_L)_{ijk}^q$ - densitatea în stare lichidă;
- L_{ijk} - căldura latentă a elementului "i,j,k";
- $(c_s)_{ijk}^q$ - căldura specifică în stare solidă a elementului "i,j,k" la momentul "q";
- $(c_L)_{ijk}^q$ - căldura specifică în stare lichidă a elementului "i,j,k" la momentul "q";
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_{ced}$ - căldura transmisă între elementul "i,j,k" și elementele vecine;
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ - variația conținutului de căldură masică a elementul "i,j,k" ca urmare a modificării temperaturii și/sau a stării de agregare;
- $\alpha s_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul "q" între elementul "i,j,k" și elementul vecin situat la stânga lui;
- $\alpha d_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul "q", între elementul "i,j,k" și elementul vecin situat la dreapta lui;
- $\alpha h_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul "q", între elementul "i,j,k" și elementul vecin situat deasupra lui;
- $\alpha j_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul "q", între elementul "i,j,k" și elementul vecin situat sub el;
- $\alpha f_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere al căldurii la momentul "q", între elementul "i,j,k" și elementul vecin situat în fața lui;
- $\alpha t_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere al căldurii la momentul "q", între elementul "i,j,k" și elementul vecin situat în spatele lui.

To express the parameters in the mathematical model equations, the following notations are assumed:

- T_{ijk}^q - the temperature of the element with indexes "i,j,k", at the "q" moment;
- T_{ijk}^{q+1} - the temperature of the element with indexes "i,j,k", at the "q+1" moment;
- $(T_s)_{ijk}$ - the solidification temperature of the "i,j,k" element;
- ξ_{ijk}^q - the fraction of solid of the "i,j,k" element; at the "q" moment;
- Δ - the length of the elements (the step of mesh);
- $(\rho_s)_{ijk}^q$ - the density in the solid state of the "i,j,k" element at the "q" moment;
- $(\rho_L)_{ijk}^q$ - the density in the liquid state of the "i,j,k" element at the "q" moment;
- L_{ijk} - the latent heat of the "i,j,k" element;
- $(c_s)_{ijk}^q$ - the specific heat in the solid state of the "i,j,k" element at the "q" moment;
- $(c_L)_{ijk}^q$ - the specific heat in the liquid state of the "i,j,k" element at the τ_k moment;
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_{tr}$ - the heat changed between the "i,j,k" element and neighbour elements;
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ - the mass heat released by the "i,j,k" element as result of temperature modification or changing the state liquid-solid;
- $\alpha s_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the "q" moment, between the "i,j,k" element and the element located on the left side;
- $\alpha d_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the "q" moment, between the "i,j,k" element and the element located on the right side;
- $\alpha h_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the "q" moment, between the "i,j,k" element and the element located up ;
- $\alpha j_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the "q" moment, between the "i,j,k" element and the element located below;
- $\alpha f_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the "q" moment, between the "i,j,k" element and the neighbour element located before;
- $\alpha t_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the "q" moment, between the "i,j,k" element and the neighbor element located behind.

5. ECUAȚIILE MODELULUI MATEMATIC

La un moment oarecare τ_q , starea unui element de volum cu coordonatele "i,j,k" este caracterizată prin temperatura T_{ijk}^q și fracția de solid ξ_{ijk}^q . Din ecuația de bilanț termic particularizată pentru un element "i,j,k" și pentru un interval de timp " τ " se determină parametrii T_{ijk}^{q+1} și ξ_{ijk}^{q+1} pentru momentul următor τ_{q+1} . Ecuația de bilanț termic pentru un element "ijk" se scrie:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_{ced} = (\Delta Q_{ijk}^q)_m \quad (1)$$

Căldura schimbată de elementul "i,j,k" cu elementele vecine, pe durata unui interval de timp elementar " τ ", între momentele τ_q și τ_{q+1} se calculează pe baza schemei din **Figura 2** și este dată de ecuația:

$$\begin{aligned} (\Delta Q_{ijk}^q)_{ced} = & [\alpha s_{i,j,k}^q (T_{ijk}^q - T_{i-1,j,k}^q) + \alpha d_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i+1,j,k}^q) + \\ & + \alpha h_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j-1,k}^q) + \alpha j_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j+1,k}^q) + \\ & + \alpha f_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j,k-1}^q) + \alpha t_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j,k+1}^q)] \cdot (\Delta)^2 \cdot \tau \end{aligned} \quad (2)$$

Căldura masică cedată de elementul "i,j,k" într-un interval de timp " τ " depinde de starea inițială a elementului la momentul "q" (caracterizată prin T_{ijk}^q și ξ_{ijk}^q) și de starea finală la momentul "q+1" (caracterizată prin T_{ijk}^{q+1} și ξ_{ijk}^{q+1}).

În cazul aliajelor eutectice la exprimarea acestei calduri se întâlnesc nouă situații. Aceste cazuri sunt reprezentate grafic în **Tabelul 1**.

Ecuațiile detaliate pentru fiecare caz în parte sunt următoarele:

a) Răcire în stare lichidă și solidificare parțială (tabelul 1, nr. crt. 2).

Dacă inițial la momentul τ_q starea elementului "i,j,k" este caracterizată prin $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 0$, iar după intervalul de timp τ , la momentul τ_{q+1} starea lui este caracterizată prin $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, atunci variația căldurii masice este dată de relația:

$$(Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot [(T_{ijk}^q - T_{Sijk}^q) \cdot c_{Lijk}^q + \xi_{ijk}^{q+1} \cdot L_{ijk}] \quad (3)$$

b) Răcire sau încălzire în stare lichidă (tabelul 1, nr. crt. 1a sau 1b). Dacă starea inițială este $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 0$, iar după intervalul de timp τ mărimile de stare sunt $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, variația căldurii masice a elementului "i,j,k" este dată de relația:

5. THE MATHEMATICAL MODEL EQUATIONS

At any time τ_q , the status of each element "i,j,k" is characterized by the momentary temperature T_{ijk}^q and solid fraction ξ_{ijk}^q . From the thermal balance equation for an element "i,j,k", for the elementary time interval " τ ", the parameters T_{ijk}^{q+1} , ξ_{ijk}^{q+1} can be determined for the next moment τ_{q+1} .

The heat balance equation for an element "i,j,k" are written:

The heat transmitted by the element "i,j,k" to neighbouring elements, through the six sides, in elementary time " τ " (between moments τ_q and τ_{q+1}) is calculated based on the scheme from **Figure 2** and is given by the equation:

The mass heat given by the "i,j,k" element in a " τ " time interval depends on the initial status of the element at a "q" moment (characterized by T_{ijk}^q and ξ_{ijk}^q) and the final status at a "q+1" moment (characterized by T_{ijk}^{q+1} and ξ_{ijk}^{q+1}).

In the case of eutectic alloys, nine situations are encountered when expressing this heat. These cases are represented in the chart in **Table 1**.

The detailed equations for each case are the following:

a) Cooling in liquid status and partial solidification (table 1, no. 2).

If at a τ_q moment the "i,j,k" element status is characterized by $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 0$, and at a τ_{q+1} moment its status is characterized by $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$ then the mass variation heat is given by the relation:

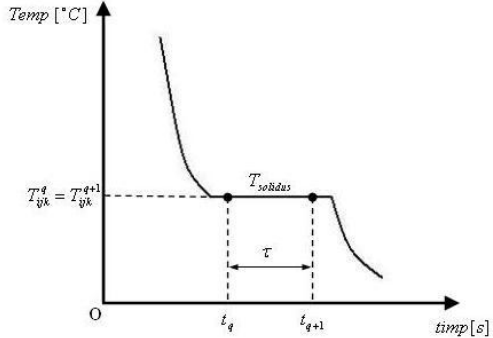
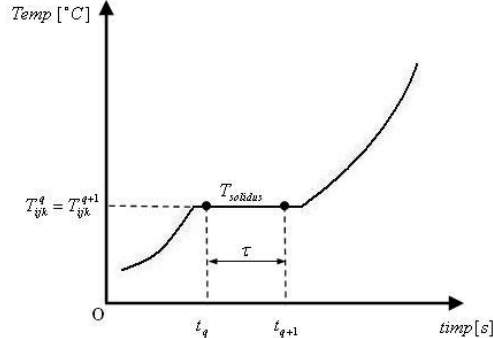
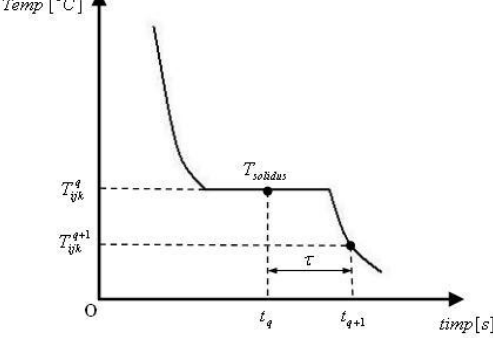
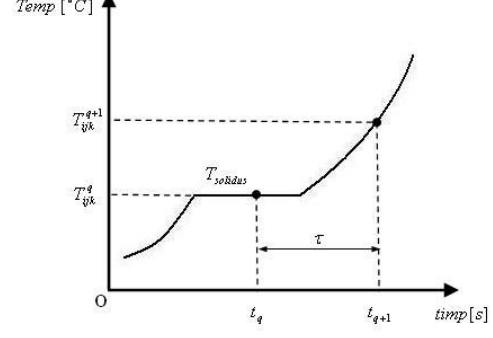
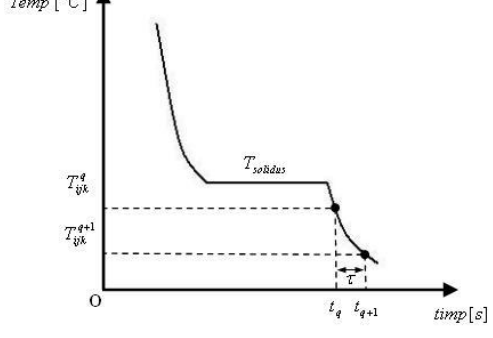
b) Cooling or heating in liquid status (table 1, no. 1a or 1b). If the initial status is $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 0$, and after the τ time interval the status quantities are $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, then the mass variation heat of the "i,j,k" element is given by the relation:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot (T_{ijk}^q - T_{ijk}^{q+1}) c_{Lijk}^q \quad (4)$$

Tabelul 1. Cazurile posibile la explicitarea variației căldurii masice a elementelor $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ în funcție de temperaturile T_{ijk}^q și T_{ijk}^{q+1} în raport cu temperatura T_{Sijk} = (temperatura solidus)

Table 1. The possible cases for explaining the mass variation heat of an element $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ depending on the T_{ijk}^q and T_{ijk}^{q+1} temperature positioning related to temperature T_{Sijk} = (solidus temperature)

No.	Current temperature	Type of process	The graphic of temperature variation in a τ time interval
1a	$T_{ijk}^q > T_{ijk}^{q+1} > T_{solidus}$	Cooling in liquid status	
1b	$T_{ijk}^{q+1} > T_{ijk}^q > T_{solidus}$	Heating in liquid status	
2	$T_{ijk}^q > T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	Cooling in liquid status and partial solidification	
3	$T_{ijk}^q > T_{solidus} > T_{ijk}^{q+1}$	Cooling in liquid status, total solidification and cooling in solid status	

4a	$T_{ijk}^q = T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	Partial solidification at solidification temperature $T_{solidus}$	
4b	$T_{ijk}^q = T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	Partial melting at solidification temperature $T_{solidus}$	
5	$T_{ijk}^q = T_{solidus} > T_{ijk}^{q+1}$	Total solidification at solidus temperature and cooling in solid status	
6	$T_{ijk}^q = T_{solidus} < T_{ijk}^{q+1}$	Total melting at solidus temperature and heating in liquid status	
7a	$T_{ijk}^{q+1} < T_{ijk}^q < T_{solidus}$	Cooling in solid status	

7b	$T_{ijk}^q < T_{ijk}^{q+1} < T_{solidus}$	Heating in solid status	
8	$T_{ijk}^q < T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	Heating in solid status and partial melting	
9	$T_{ijk}^q < T_{solidus} < T_{ijk}^{q+1}$	Heating in solid status, total melting and heating in liquid status	

c) Răcire în stare lichidă, solidificare totală și răcire în stare solidă (tabelul 1, nr. crt. 3).

Dacă inițial $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 0$, iar $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$, variația căldurii masice a elementului "i,j,k" este dată de relația:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot [(T_{ijk}^q - T_{Sijk}) \cdot c_{Lijk}^q + L_{ijk} + (T_{Sijk} - T_{ijk}^{q+1}) \cdot c_{Sijk}^q] \quad (5)$$

d) Solidificare sau topire parțială la temperatura solidus (tabelul 1, nr. crt. 4a sau 4b).

Dacă la momentul τ_q , temperatura elementului "i,j,q" este $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, iar în stare finală la momentul τ_{q+1} starea este $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$ variația căldurii masice este:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} (\xi_{ijk}^{q+1} - \xi_{ijk}^q) L_{ijk} \quad (6)$$

e) Retopire totală la temperatura solidus și încălzire în stare lichidă (tabelul 1, nr. crt. 6).

c) *Cooling in liquid status, total solidification and cooling in solid status (table 1, no. 3).*

If initially $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 0$, and $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$, the mass variation heat of the "i,j,k" element is given by the relation:

d) *Partial solidification or melting at solidus temperature (table 1, no. 4a or 4b).*

If at a τ_q moment the temperature of the element "i,j,q" is $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, and in the final status at a τ_{q+1} moment the status is $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$ the variation of the mass heat is:

e) *Total melting at solidus temperature and heating in liquid status (table 1, no. 6).*

Dacă la momentul τ_q , temperatura elementului "i,j,k" este $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, iar în stare finală $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$ atunci variația căldurii masice este dată de relația:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} [(T_{ijk}^q - T_{ijk}^{q+1})c_{Lijk}^q - L_{ijk}\xi_{ijk}^q] \quad (7)$$

f) Solidificare totală la temperatura solidus și răcire în stare solidă (tabelul 1. nr. crt. 5).

Dacă la momentul τ_q , temperatura elementului "i,j,k" este $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, iar în stare finală $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$ variația căldurii masice este:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} [L_{ijk}(1 - \xi_{ijk}^q) + c_{Sijk}^q(T_{Sijk} - T_{ijk}^{q+1})] \quad (8)$$

g) Încălzire în stare solidă și retopire parțială (tabelul 1, nr. crt. 8).

Dacă inițial, la momentul τ_q elementul "i,j,k" este complet solidificat, starea lui fiind caracterizată prin $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 1$, iar la momentul τ_{q+1} starea elementului este $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ și fracția solidă $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$, atunci variația căldurii masice este dată de relația:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot [c_{ijk}^q(T_{ijk}^q - T_{Sijk}) - (1 - \xi_{ijk}^{q+1})L_{ijk}] \quad (9)$$

h) Încălzire în stare solidă, retopire totală și încălzire în stare lichidă (tabelul 1, nr.crt. 9).

Dacă la momentul τ_q starea elementului "i,j,k" este caracterizată prin $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 1$, iar la momentul final τ_{q+1} starea elementului este $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ și fracția solidă $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, atunci variația căldurii masice a elementului "i,j,k" este dată de relația:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} [c_{Sijk}^q(T_{ijk}^q - T_{Sijk}) - L_{ijk} + c_{Lijk}^q(T_{Sijk} - T_{ijk}^{q+1})] \quad (10)$$

i) Încălzire sau răcire în stare solidă (tabelul 1, nr. crt. 7a sau 7b).

Dacă $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 1$, iar $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$, variația căldurii masice a elementului "i,j,k" în intervalul de timp " τ " este dată de relația:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot c_{Sijk}^q \cdot (T_{ijk}^q - T_{ijk}^{q+1}) \quad (11)$$

If at a τ_q moment the temperature of the "i,j,k" element is $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, and in the final status $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, then the variation of the mass heat is given by the relation:

f) Total solidification at solidus temperature and cooling in solid status (table 1. no. 5).

If at a τ_q moment, the temperature of the "i,j,k" element is $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, and in the final status $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$ then the variation of the mass heat is:

g) Heating in solid status and partial melting (table 1, no. 8).

If initially, at a τ_q moment, the element "i,j,k" is completely solidified, its status is characterized by $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 1$, and at the moment τ_{q+1} the status of the element is $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ and the solid fraction $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$, then the variation of the mass heat is given by the relation:

h) Heating in solid status, total melting and heating in liquid status (table 1, no. 9).

If at a τ_q moment the status of the "i,j,k" element is characterized by $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 1$, and at a τ_{q+1} moment the status of the element is $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ and the solid fraction $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, then the variation of the mass heat of the "i,j,k" element is given by the relation:

i) Heating or cooling in solid status (table 1, no. 7a or 7b).

If $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 1$, while $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$, then the variation of the mass heat of the "i,j,k" element is given by the relation:

6. SCHEMA DE REZOLVARE A MODELULUI MATEMATIC

Schema de rezolvare a modelului matematic are la bază înlocuirea relațiilor de mai sus (2 ÷ 11) în ecuația (1). Schema logică utilizează relații de condiționalitate, referitoare la temperatura inițială a elementelor discretizate, T_{ijk}^q și temperatura finală T_{ijk}^{q+1} .

Se pornește de la ipoteza că într-o primă fază, după intervalul de timp τ , temperatura unui element cu coordonate "i,j,k", devine egală cu temperatura de solidificare (deci $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$). În această condiție se calculează fracția solidificată ξ_{ijk}^{q+1} la momentul τ_{q+1} .

În cazul că fracția solidificată calculată nu are convergență în intervalul [0,1] se revine asupra calculului și se calculează temperatura finală corectă, T_{ijk}^{q+1} .

Schema logică a modelului este sistematizată în cele nouă cazuri din **Tabelul 1**, în funcție de T_{ijk}^q și de T_{ijk}^{q+1} .

Softurile utilizate în prezent pe plan internațional explicitează și rezolvă ecuația de bilanț termic numai în funcție de temperatura inițială a elementelor (la un moment q). [5, 6, 7] Aceasta conduce la o sistematizare a rezolvării în trei cazuri. De aceea, aceste softuri nu pot simula solidificarea la temperatură constantă. Din acest punct de vedere modelul matematic prezentat în această lucrare este mai precis. [1]

7. STRUCTURA SOFTULUI ȘI REZULTATE OBTINUTE

Pe baza acestui model matematic, s-a realizat softul destinat simulării solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice. Acesta utilizează sistemul de programare MATLAB.

Programul MATLAB oferă următoarele avantaje:

- simplitate în realizarea aplicațiilor inginerești care lucrează cu simboluri, operatori și funcții matematice;
- posibilitatea de lucru cu matrice spațiale de orice dimensiuni;
- facilități în prelucrarea matematică și în reprezentarea grafică a rezultatelor.

Softul realizat este aplicabil pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice, cu orice geometrie și dimensiuni. Softul este conceput pentru cazul când ansamblul cuprinde maximum patru tipuri de materiale: formă, aliaj lichid, răcitor, miezuri sau vopsele termoizolante.

6. THE MATHEMATICAL MODEL SOLVING

The solving of the mathematical model is based on the replacement of the relations (2 ÷ 11) in the thermic balance (1). The solving scheme uses conditionality relations regarding the initial temperature of the elements (T_{ijk}^q) and the final temperature (T_{ijk}^{q+1}).

In a first phase we start from the hypothesis that after the τ time interval, the temperature of an element with "i,j,k" coordinates becomes equal to the solidification temperature (so $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$). Thus the hypothesis calculates the solidified fraction ξ_{ijk}^{q+1} at the moment τ_{q+1} .

In case the calculated solidified fraction does not have any convergence in the [0,1] interval, then the solid fraction at a moment q+1 is $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$ or $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$.

The calculus is reviewed and the correct final temperature is estimated (T_{ijk}^{q+1}).

*Thus the solving is ordered in the nine cases found in **Table 1**, according to T_{ijk}^q and T_{ijk}^{q+1} .*

The software that is at present used internationally develops and solves the thermic balance only in terms of the initial temperature of the elements (at a q moment). [5, 6, 7] This leads to a systematization in three cases. That is why this software cannot simulate solidification at a constant temperature. From this point of view, the mathematical model presented in this paper is more precise. [1]

7. SOFTWARE STRUCTURE AND OBTAINED RESULTS

On the basis of this mathematical model, the software was designed to simulate the solidification of the cast parts from eutectic alloys. This uses the MATLAB programming system.

MATLAB offers the following advantages:

- *simplicity in making the engineering calculus that works with symbols, operators and mathematical functions;*
- *the possibility of working with three-dimensional mould of any dimensions;*
- *facilities in mathematical processes and in the chart representation of the results.*

The software is suited for the simulation of the cast part solidification from eutectic alloys, with any geometry or dimensions. The software is designed for the cases when the assembly comprises a maximum of four types of materials: shape, liquid alloy, coolers, cores or insulator dye.

Softul lucrează cu patru tipuri de fișiere:

- fișiere de lucru în Matlab pentru inițializarea simulării și efectuarea calculelor (fișiere cu extensia *.m);
- fișierele prin care utilizatorul impune selectarea rezultatelor dorite (fișiere cu extensia *.in);
- fișiere în care sunt afișate rezultatele numerice ale simulării (fișiere cu extensia *.out). Acestea sunt create automat de soft în timpul rulării;
- fișiere în care sunt reprezentate grafic rezultatele (fișiere de tip *.jpg).

Softul furnizează următoarele rezultate privind solidificarea pieselor turnate:

- timpul de început de solidificare a piesei turnate;
- timpul de sfârșit de solidificare a piesei turnate;
- coordonatele nodului termic;
- evoluția temperaturii în oricare punct din ansamblul piesă turnată - formă de turnare;
- evoluția fracției de solid în oricare punct al sistemului piesă turnată - formă;
- evoluția vitezei de încălzire/răcire în orice punct al sistemului;
- evoluția cantității de aliaj lichid din sistem;
- evoluția cantității de aliaj lichid util disponibil în maselotă;
- evoluția gradientului de temperatură local în orice punct al sistemului;
- timpul de solidificare în orice punct al sistemului;
- temperatura în orice punct al sistemului la orice moment;
- harta repartizării temperaturii în sistem (harta izotermelor) la orice moment;
- harta deplasării frontului de solidificare în aliajul lichid.

Aceste rezultate permit o analiză avansată a solidificării pieselor turnate. Pe această bază este posibilă optimizarea tehnologiilor de turnare, în vederea eliminării defectelor cauzate de solidificare din piesele turnate.

Rezultatele obținute prin utilizarea softului realizat pe baza acestui model matematic au fost verificate prin două metode [1, 2]:

- experimental (prin analiza termică),
- prin comparare cu alte softuri recunoscute pe plan internațional.

Ambele verificări au arătat că softul realizat pe baza modelului matematic prezentat în această lucrare conduc la rezultate corecte, compatibile cu procesul real de solidificare.

The software works with four types of files:

- *scratch files in Matlab for initializing the simulation and calculus execution (files with *.m extension);*
- *files where the user asserts the selection of the desired results (files with *.in extension);*
- *files where you have the numerical results of the simulation (files with *.out extension). These are automatically created by the software during simulation;*
- *files where the results are presented in a chart (of the type *.jpg).*

The software supplies the following results regarding the solidification of the cast parts:

- *the beginning time of solidification of the casting;*
- *the ending time of solidification of the casting;*
- *the hot spot coordinates;*
- *the temperature evolution in any point of the assembly casting – mould;*
- *the evolution of the solid fraction in any point of the system casting – mould;*
- *the evolution the of heating/ cooling speed in any point of the system;*
- *the evolution of the liquid alloy quantity in the system;*
- *the evolution of the useful liquid alloy available in the feeder;*
- *the evolution of the local gradient temperature in any point of the system;*
- *the solidification time in any points of the system;*
- *the temperature in any point of the system at any moment;*
- *the map of the temperature in the system (isotherm map) at any moment;*
- *the map of the solidification front movement in the liquid alloy.*

These results allow an advanced analysis of the casting solidification. On this basis, the optimization of the casting technologies is possible, in order to eliminate the defects caused by solidification in the casting.

The results obtained by using the software designed on the basis of this mathematical model were verified through two methods [1, 2]:

- *experimental (by thermic analysis),*
- *by comparison to other software, recognised internationally.*

Both tests showed that the software completed on the basis of the mathematical model presented in this paper lead to correct results, compatible with the real solidification proces.

BIBLIOGRAFIE / REFERENCES

- [1] **I. CIOBANU, V. MONESCU, S.I. MUNTEANU, A. CRIȘAN** - *Simularea 3D a solidificării pieselor turnate*, Editura Universității Transilvania din Brașov, Brașov (Ro), 2010, ISBN 978-973-598-678-0.
- [2] **V. MONESCU** - *Realizarea unui program 3D pentru simularea solidificării pieselor turnate*, Teza de doctorat, Universitatea Transilvania din Brașov, Brașov, 2010.
- [3] **I. CIOBANU, V. MONESCU, S.I. MUNTEANU, A. CRIȘAN, M. MAȘNIȚĂ** - *3D Mathematical Model To Simulate the macro-solidification of Castings from Eutectic Alloys*, *Metalurgia International*, nr. 5, 2005, pp. 3-11, ISSN 1582/2214.
- [4] **D. ȘTEFĂNESCU** - *Science and Engineering of Casting Solidification*, Departament of Material Engineering, University of Alabama, Tuscalosa, 2001, ISBN 0-306-46750-X.
- [5] **D. ȘTEFĂNESCU, C. KANETKAR** - *Computer modeling of the solidification of eutectic alloys: Comparison of various models for eutectic growth of cast iron*, Departament of Material Engineering, University of Alabama, Tuscalosa, 1986, pp. 255-262.
- [6] **D. ȘTEFĂNESCU** - *Macro-modeling of solidification. Numerical approximation methods*, Departament of Material Engineering, University of Alabama, Tuscalosa, 2001, pag. 94-115.
- [7] **V. MONESCU** - *Realizarea unui program 3D pentru simularea solidificării pieselor turnate*, Teza de doctorat, Universitatea Transilvania din Brașov, Brașov, 2010.
- [8] **E. FLENDER, J. STURM** - *Technical Development Report Thirty Years of Casting Process Simulation*, *International Journal of Metalcasting*, Schaumburg, Illinois, USA, Vol. 4, Issue 2, 2010, pp. 7-24.
- [9] **I.T. ANDERSON, D.T. GETHIN, R.W. LEWIS** - *Experimental Investigation and Numerical Simulation in Investment Casting*, *International Journal of Cast Metals Research*, vol. 9, 1997, pp. 285-293.